中心極限定理を用いた撃破率の近似計算

文責：ermite

仮定

- すべてのダメージが等確率で出る
  - 例：ダメージが1〜100なら、それぞれが1%で出るときの計算をする

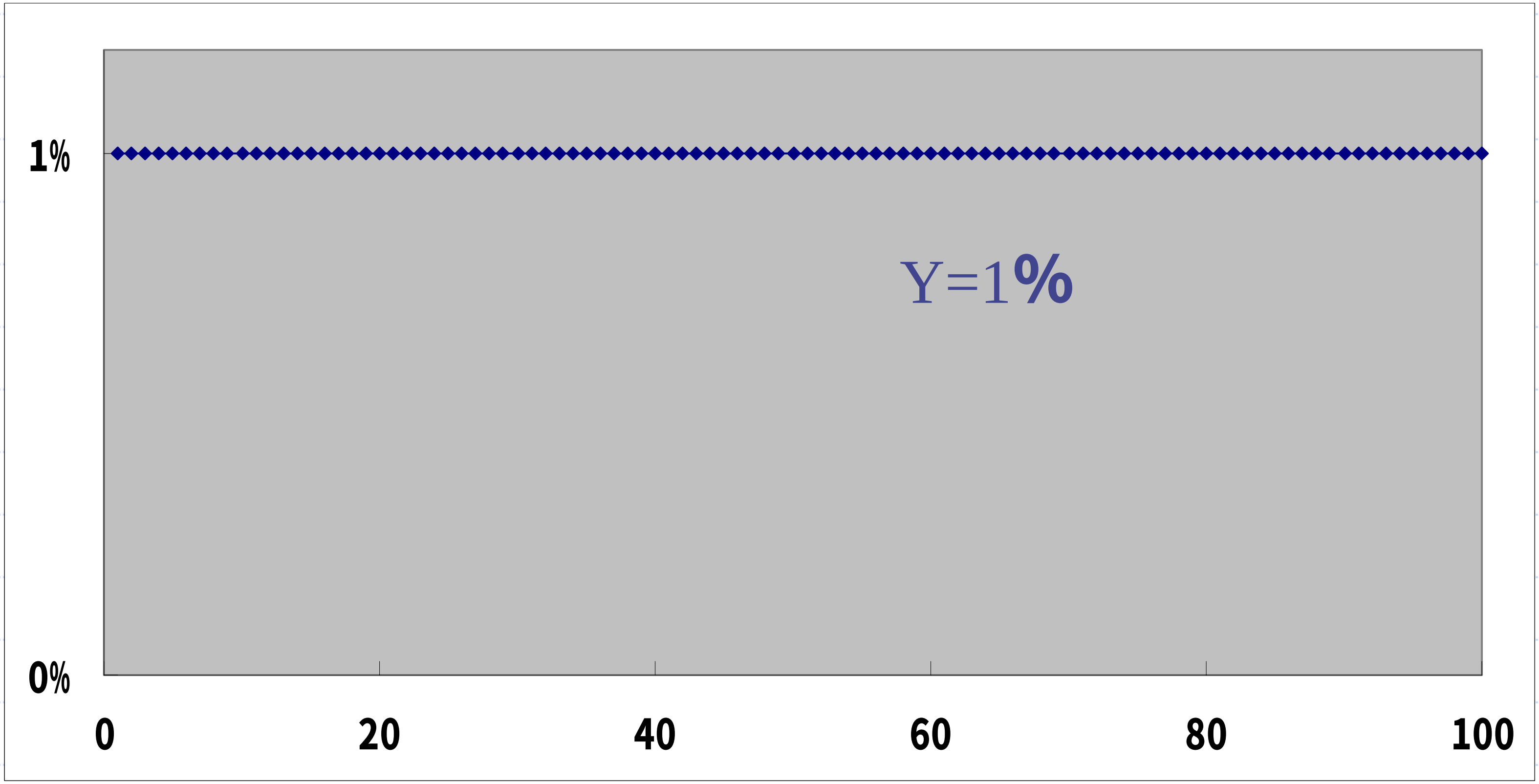
    ↓
  - あくまで近似なので、計算の都合上、小数ダメージも出るものとする
- すべてのHITが同じダメージ範囲を持つとする

グラフの種類

- 確率密度のグラフ
- 累積確率のグラフ

0〜100で等確率の例を示す

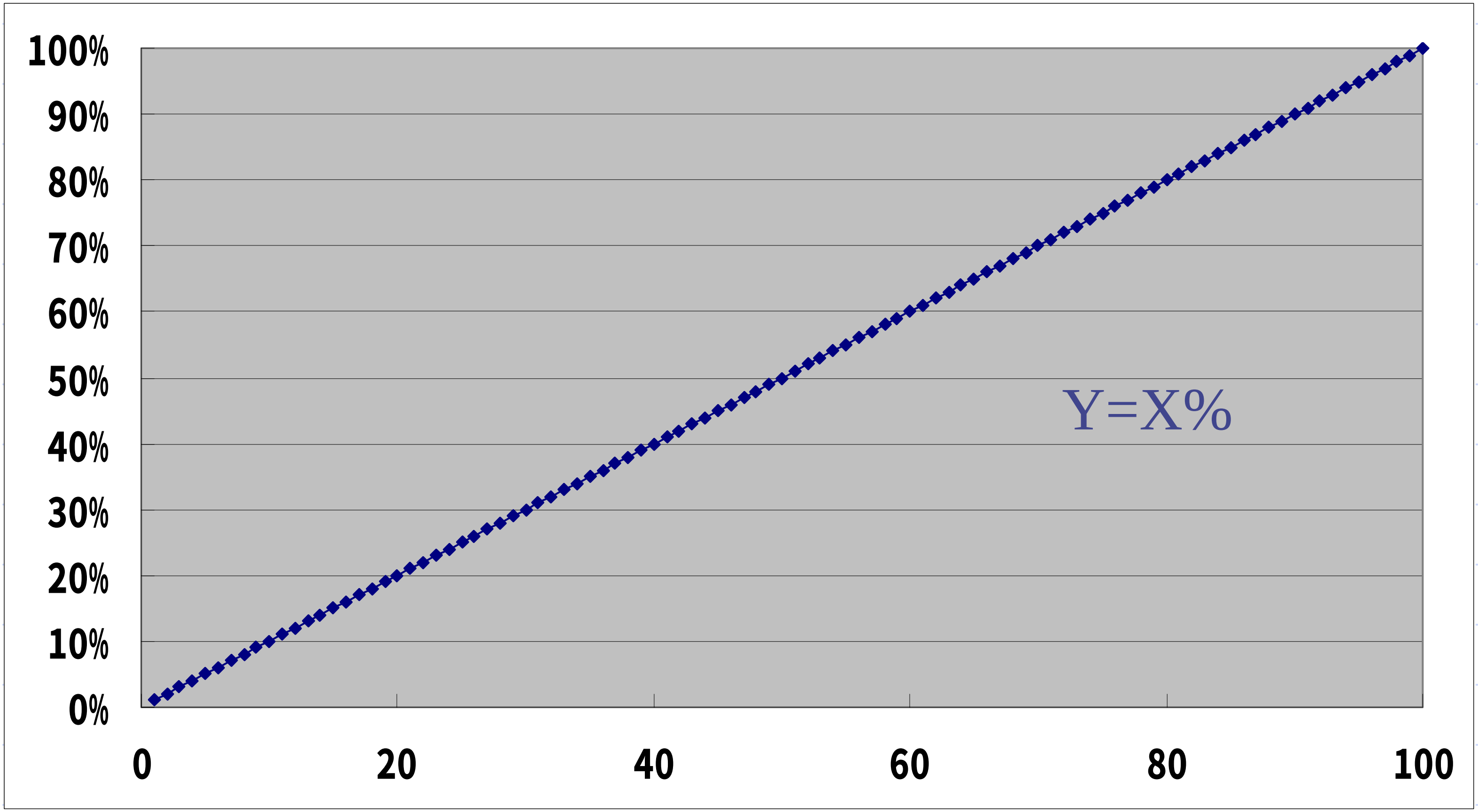
確率密度のグラフ (積算1回)



ダメージXが出る確率

→すべて1%

累積確率のグラフ (積算1回)

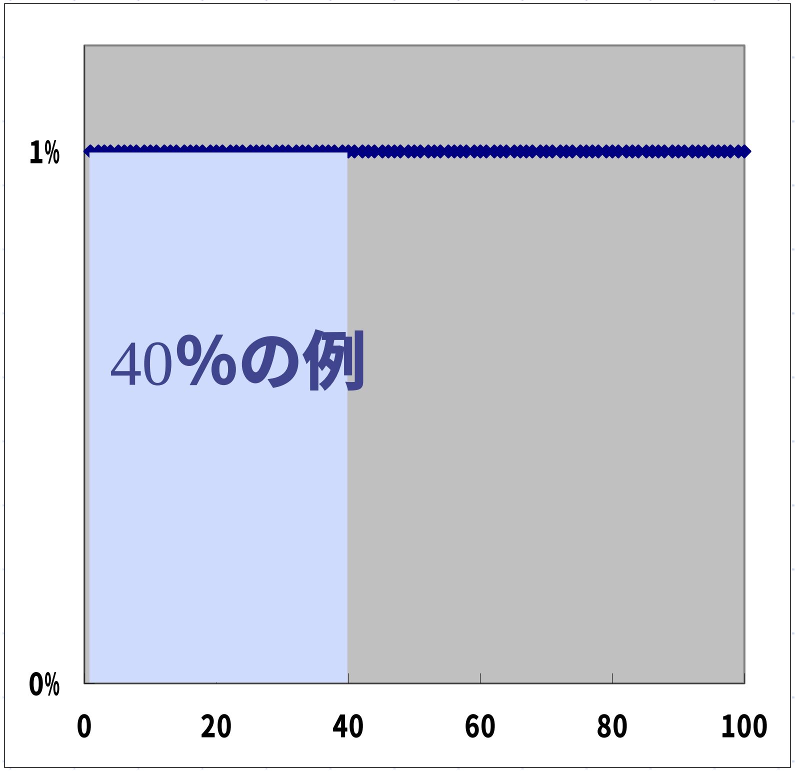


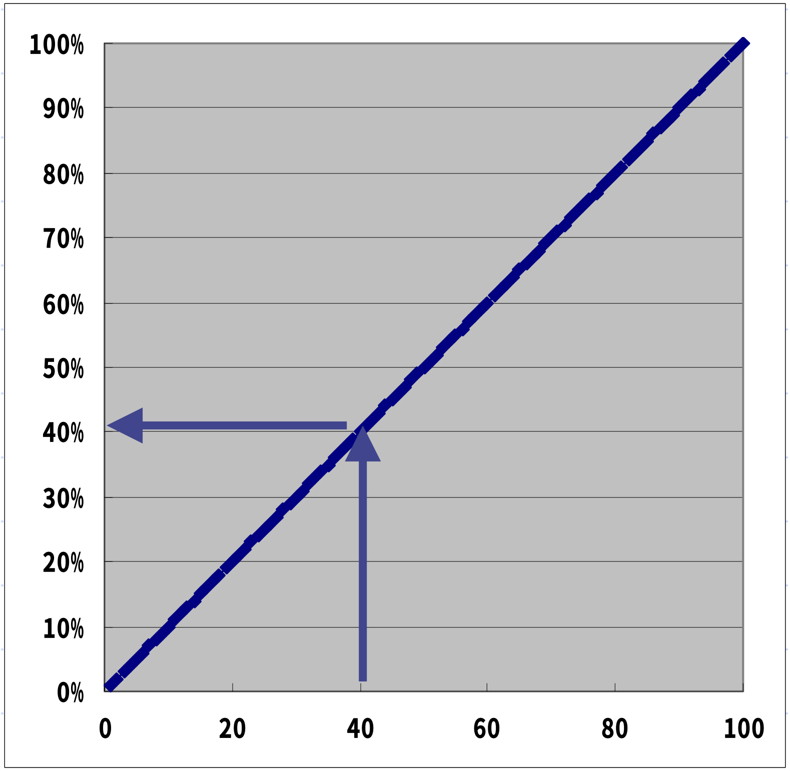
X以上のダメージが出る確率

→撃破率と言い換えられる

2つのグラフの関係

- 確率密度の0～Xの積分値(面積)が、Xでの累積確率になる





まとめ

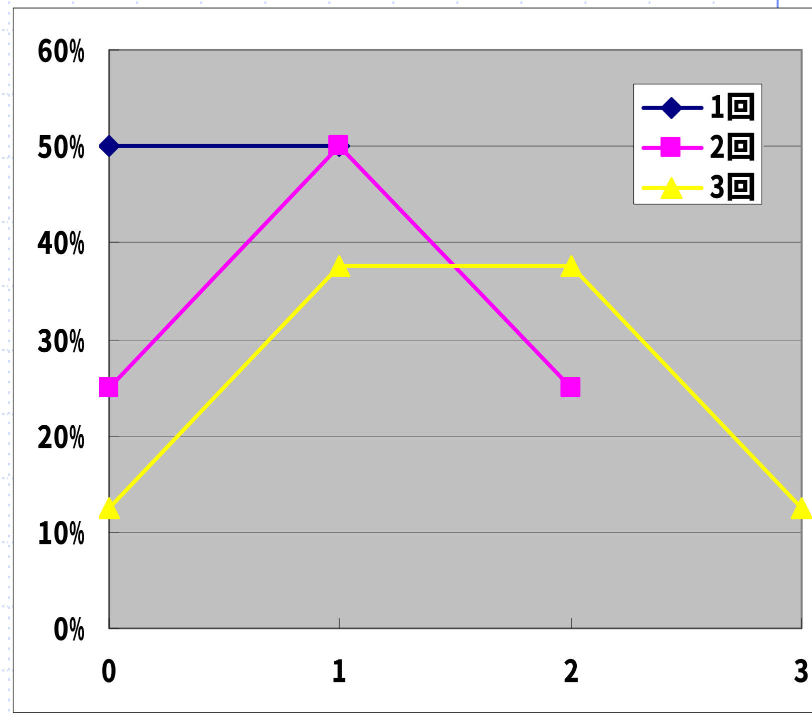
- 確率密度が計算できれば、累積確率(撃破率)を計算できるようになる。

同じ操作を繰り返す場合の傾向

- 中心値(期待値)がでやすい
- 同じような事象としてコインの表裏とか、さいころとかの例を先に

コインの場合（2項分布）

1回		0	1				
		50%	50%				
2回		1回目					
		0	1		0	1	2
2回目	0	0	1	→	25%	50%	25%
	1	1	2				
3回		2回目まで					
		0	1	2			
		25%	50%	25%			
3回目	0	0	1	2		0	12.5%
		12.5%	25%	12.5%	→	1	37.5%
	1	1	2	3		2	37.5%
		12.5%	25%	12.5%		3	12.5%

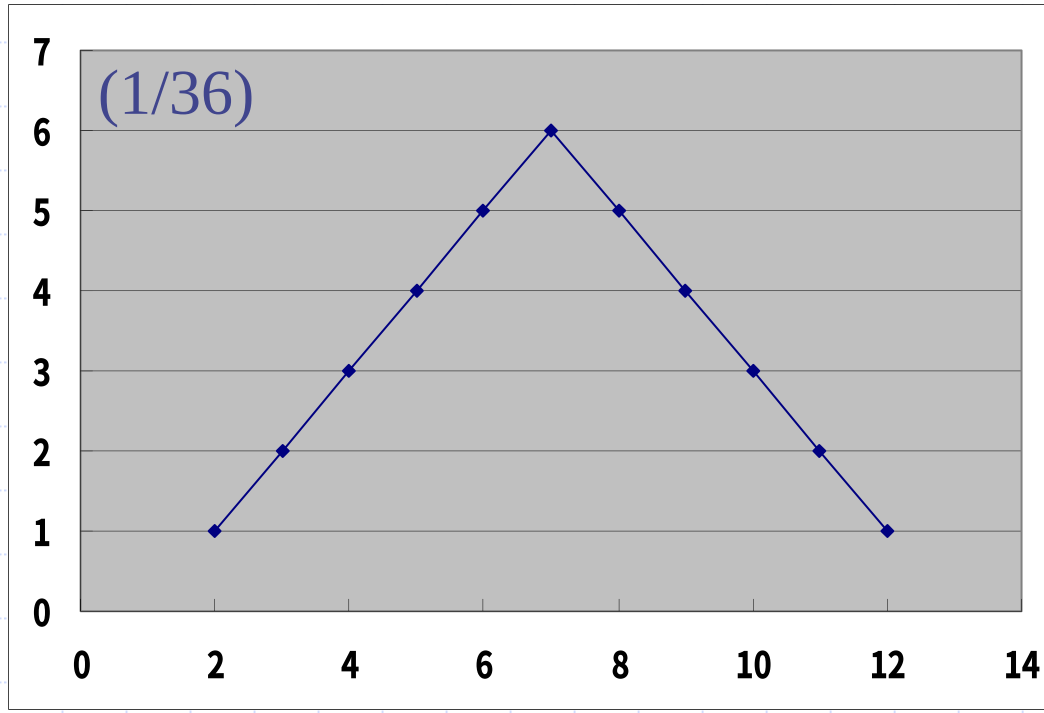


確率密度は
2回目は中心対称のとがった山に、
3回目以降はなだらかな山になる

さいころの場合 (2回目)

		1回目					
		1	2	3	4	5	6
2回目	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

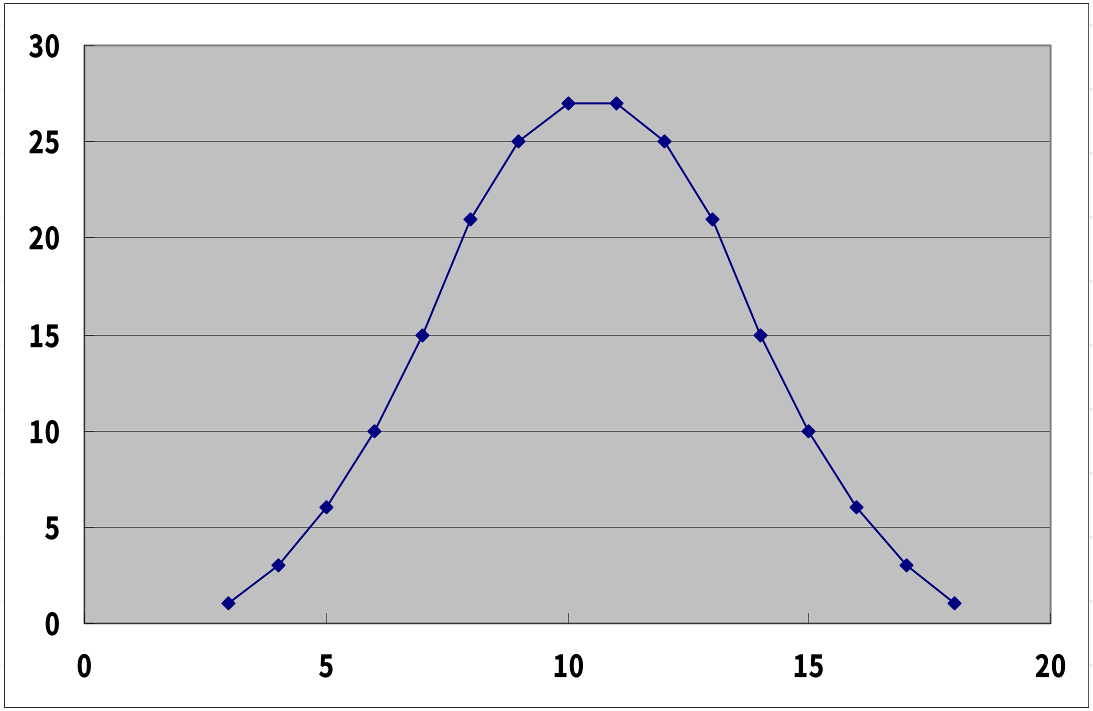
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
7	6
8	5
9	4
10	3
11	2
12	1



確率密度は積算2回目はとがった山に

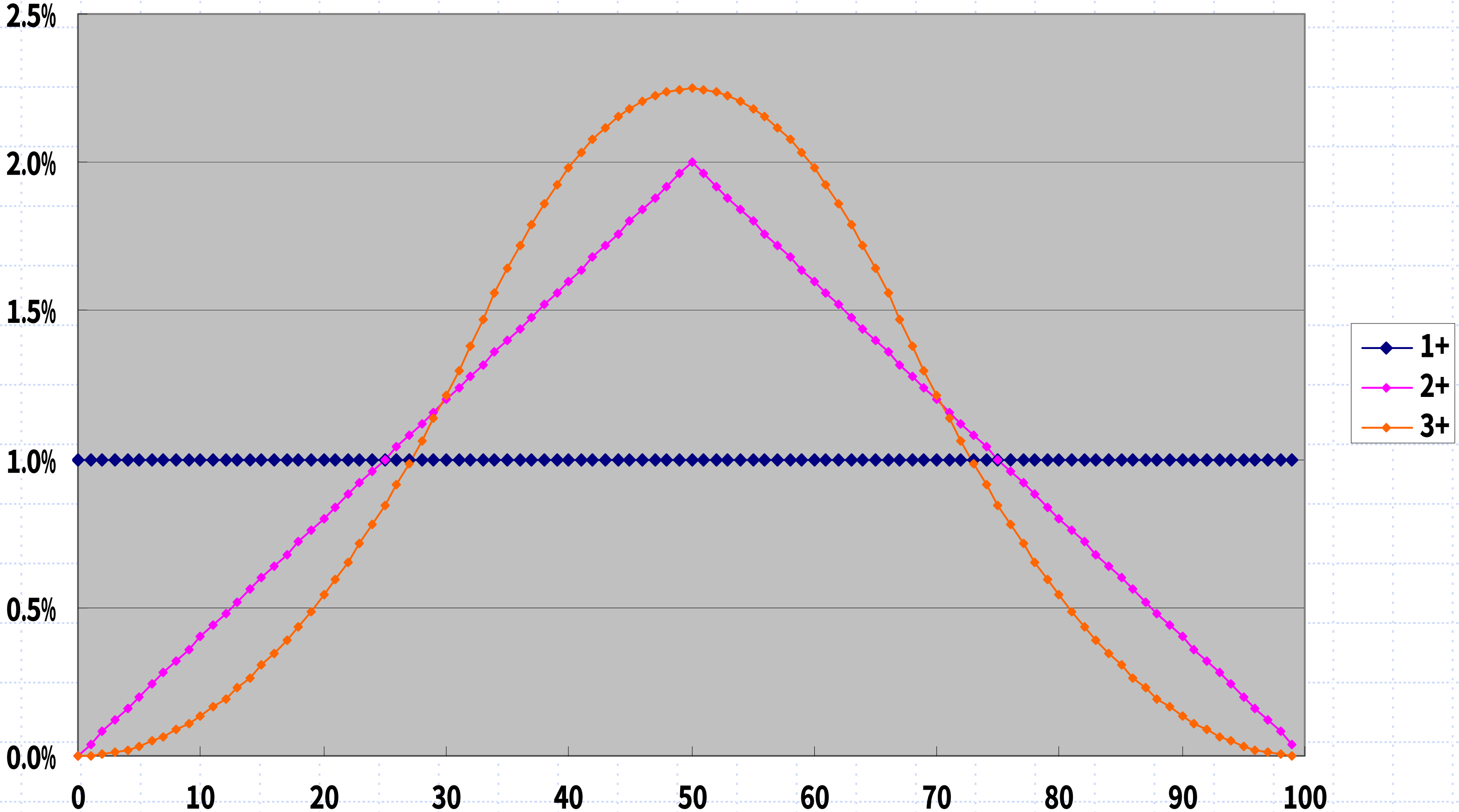
さいころの場合 (3回目)

(1/216)



確率密度は積算3回目はなだらかな山に

1~100の場合



便宜上1~100になるように横軸を÷2、÷3してある

やはり3回目以降、なだらかな山に近くなる

まとめ2

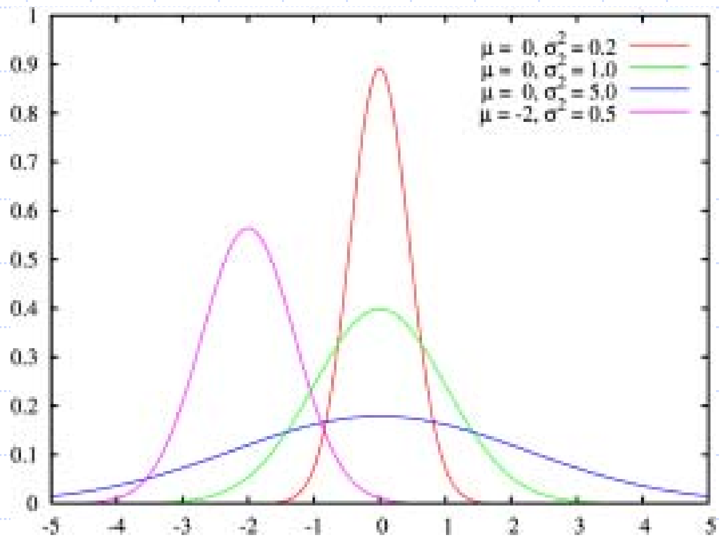
- 繰り返し回数が多くなれば、なだらかな山に近くなる

http://econom01.cc.sophia.ac.jp/stat/CentrJava.htm

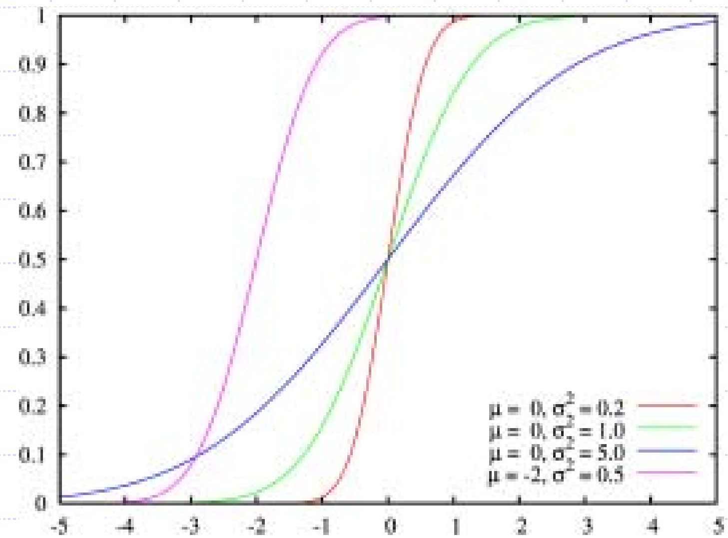
- ここで、点の細かさは山の形には影響せず、最初の例の1~100でも同じことができる

中心極限定理(統計用語)

- 繰り返し回数が多くなると、確率密度は「正規分布」で表される形に近くなる



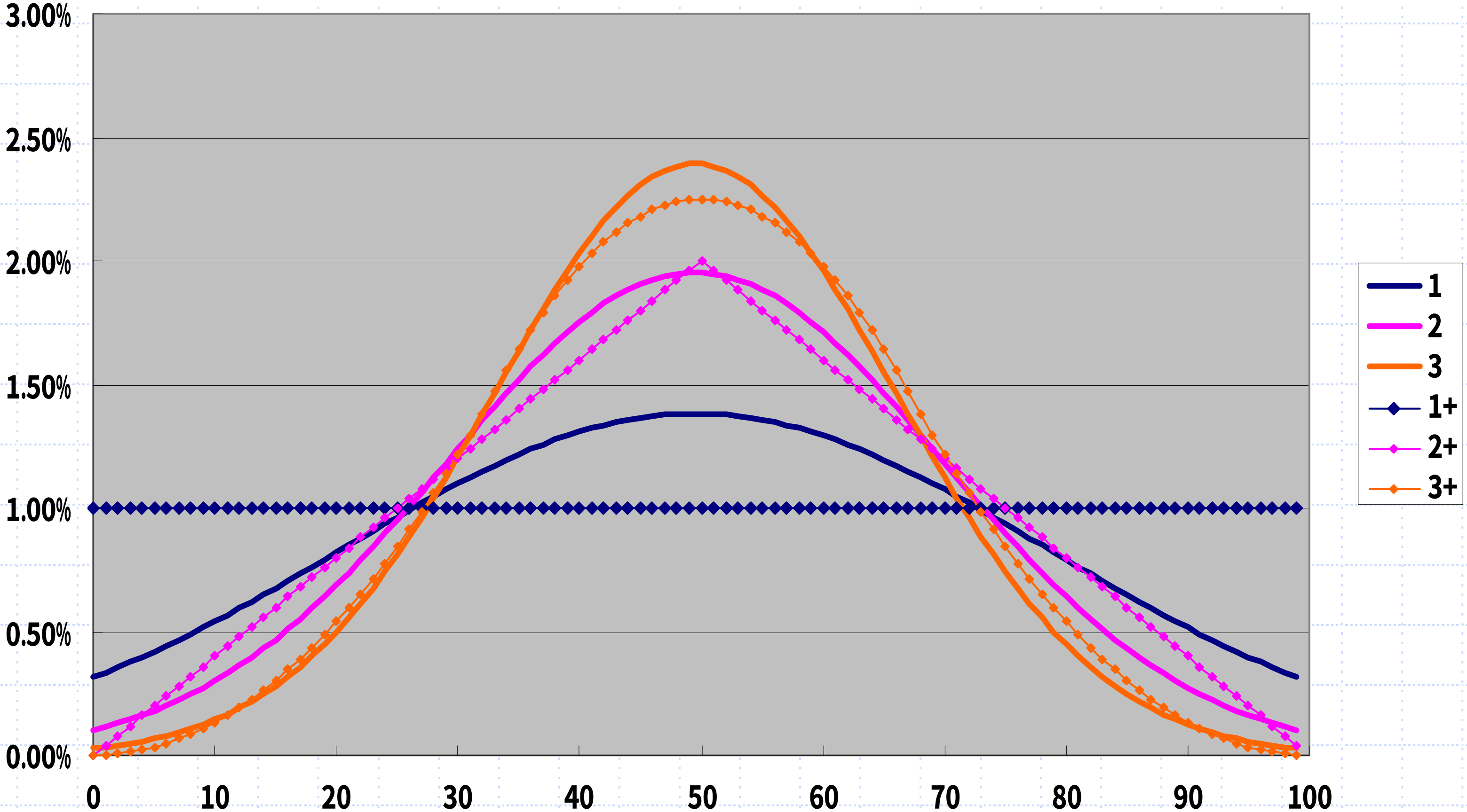
確率密度



累積確率

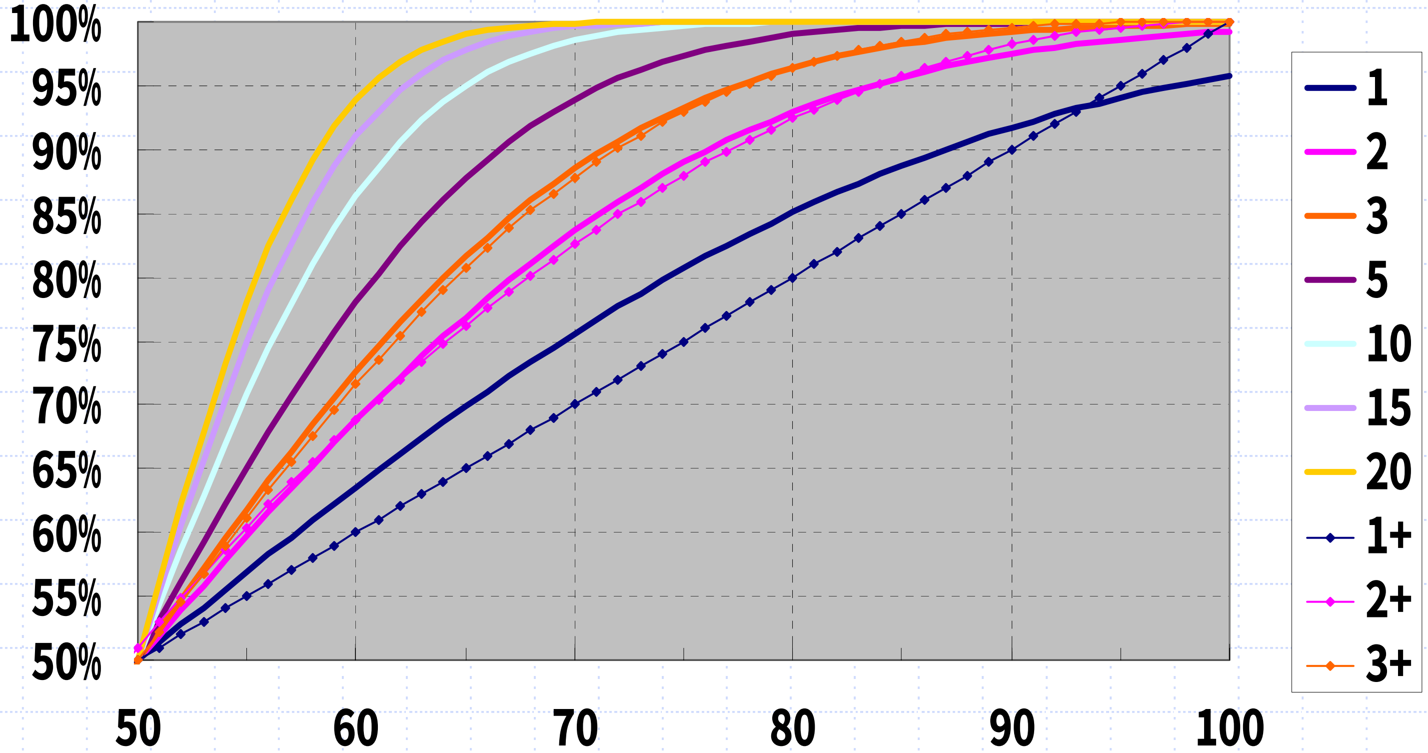
特に緑色のものを標準正規分布という

1~100の場合（確率密度)



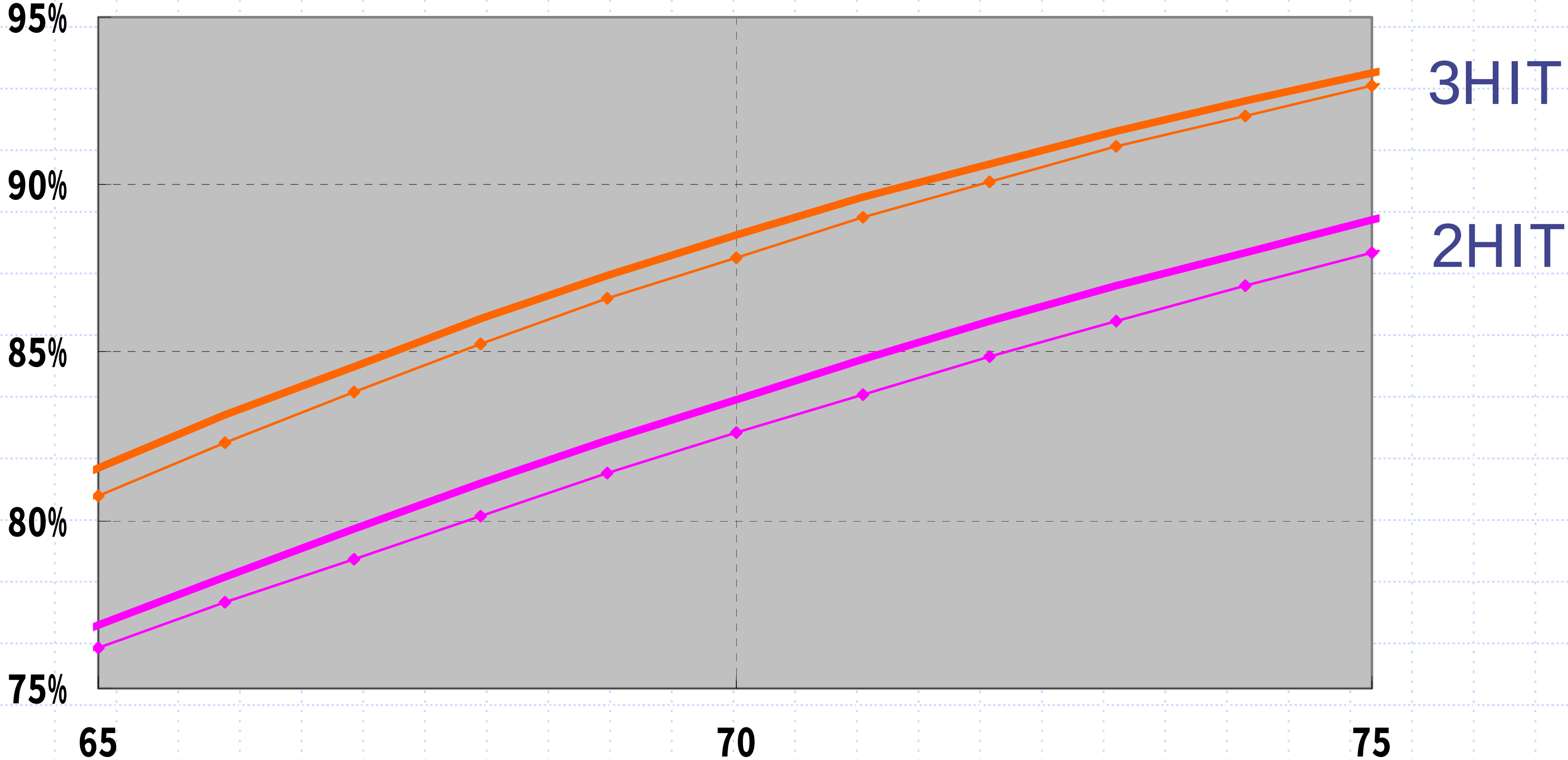
正規分布(実線)と、実際の確率(点)は
回数が増えるに従いそれなりの一致をする

1~100の場合（累積確率)



確率密度ではずれているように見えても、
合計ではそこそこ一致する

拡大図



2HITで1.2%、3HITで0.8%ぐらいの誤差に収まる

したがって

- 山の中心と、山の横幅、求めたいXを計算できれば、正規分布を使って累積確率を計算できる
  - ただし、javascriptにはXから累積確率を計算する関数(excelでいうnormdist)はないので、近似式を使う。
  - 近似式は分散(σ)を使ったものしかないので、数値を変換する

数値変換

- nHITの平均を0にすることで、山の中心は0
- 山の幅パラメータ：σは
  - σ=Math.sqrt((1HITの最大-1HITの最小)^2/12*n)
    (nが多いほど山が細く高くなる、横一線が1/12)
- 目的のXは
  - X=(nHITの平均ダメ-HP)/σ
    - (期待値50%以上だと正)

正規分布の近似式

- 累積確率=0.5±0.5*Math.sqrt(1-Math.exp(-2*X^2/Math.PI))
  - ただし、Xが+のときは+の式を使う

http://www.geocities.jp/ikuro_kotaro/koramu/gosa.htm

- もっと誤差の少ない式として

ΦL(x)=1/2±1/2[1-exp(-2x^2/π){1+x^4(0.0055+0.0551/(x^2+14.4)}]^(1/2)

上記アドレスより「Williams=山内の近似式」

Prob=0.5+0.5*Math.sqrt(1-Math.exp(-2*X*X/Math.PI)*(1+Math.pow(X,4)*(0.0055+0.0551/(X*X+14.4))))

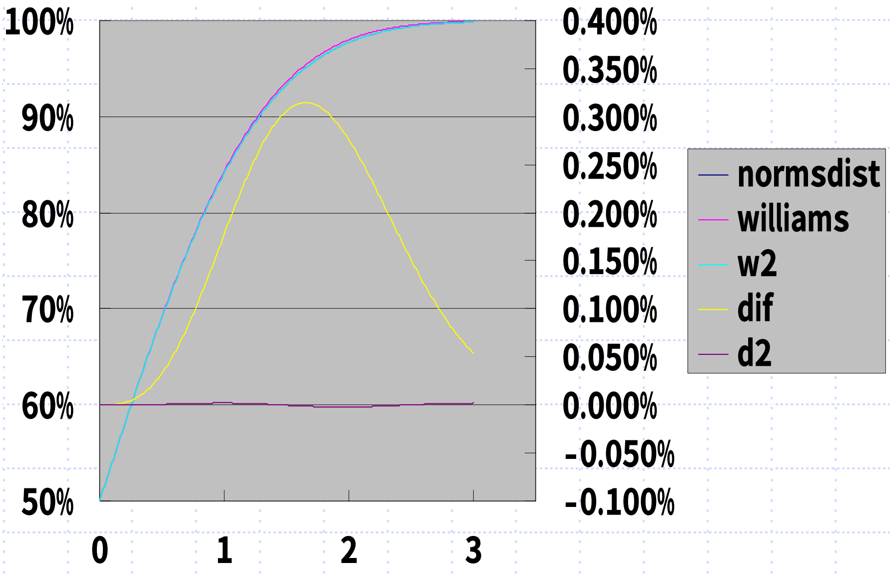
誤差の大きさ

- ダメージが一様でないことによるズレ
- 正規分布と近似式とのズレ
- 実際の式と正規分布とのズレ

の3つの誤差が現れる

1つ目はおそらく小さい
2つ目は黄色のグラフ(右軸)
〜0.3%以下に収まる
誤差の少ない式では0.02%
以下になる

→ほぼ3つ目の誤差に収まる



0%、100%付近の処理

- 正規分布では0%と100%は処理できない
  - X=(nHITの平均ダメ-HP)/σを計算したときに
  X<-3→0%　X>3→99.99%　とする
  誤差1%とするならば、X>2.3→99%とする
  最大攻撃回数1HITのときのみ100%と表示する

3HITまでの処理

- 1%以上の誤差が出るので3HITぐらいまでは累積確率を直接計算する
  - 1HIT：Y=X
  - 2HIT：Y=2*X^2 (0~50%)

    Y=1-(2*(1-X)^2) (50~100%)
  - 3HIT：Y=4.5*X^3 (0~33.3%)

    Y=4.5*X^3-13.5*(X-1/3)^3 (33.3~66.7%)

    Y=1-(4.5*(1-X)^3) (66.7~100%)

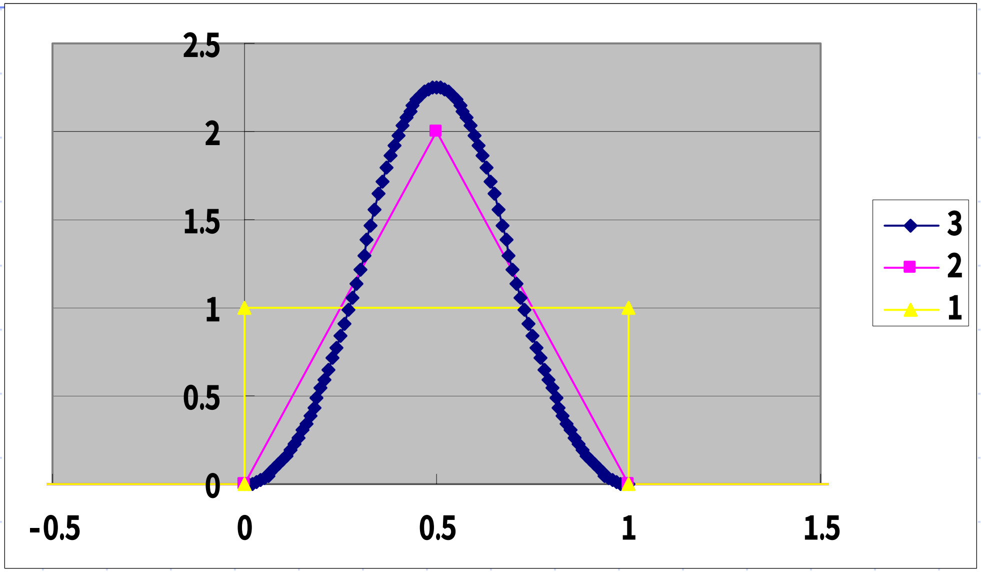
4.5は27/6で、積分2回の1/6と
0~3を0~1に補正する3^3より
導出が可能です

式の意味

- 3回合計nになる確率(nの確率密度)は
  - 2回目でn-1になる確率*3回目で1になる確率
    +2回目でn-2になる確率*3回目で2になる確率
    +2回目でn-3になる確率*3回目で3になる確率
    +・・・　になるように、数字が1~100なら
  ＝2回目でn-1～n-100になる確率　となる

そのため積分を繰り返すため
一様分布(すべてが等確率)の場合
右の表のような次数の式で表される

	確率密度		累積確率
1HIT	0次(定数)	→	1次
	↓		
2HIT	1次	→	2次
	↓		
3HIT	2次	→	3次

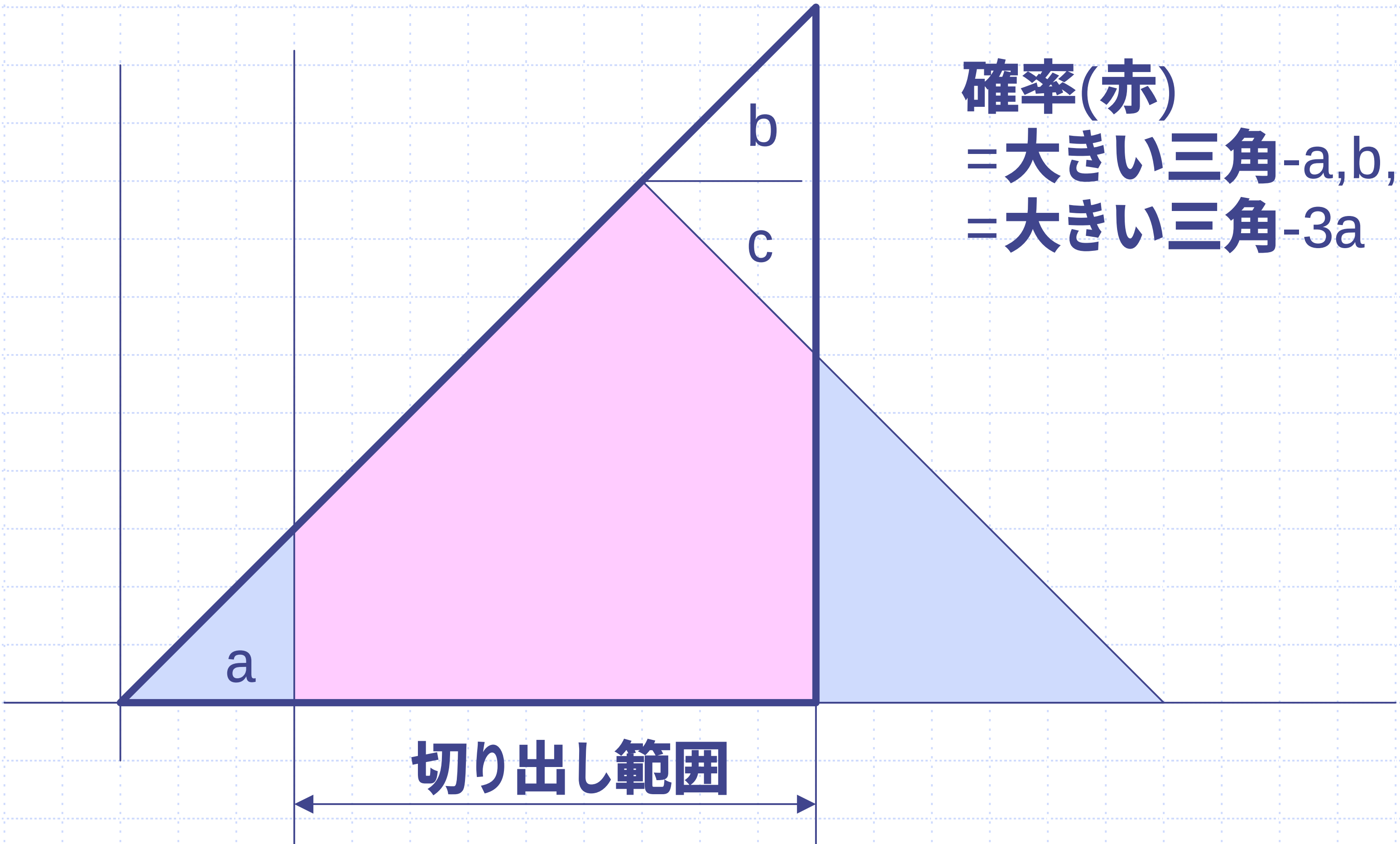


	確率密度		累積確率
1HIT	0次(定数)	→	1次
	↓		
2HIT	1次	→	2次
	↓		
3HIT	2次	→	3次

1HIT→2HIT：黄色い□を横幅1で切り出す
-1~0のときと1~2のときは0(赤の0と1に対応)、
0~1のときは最大(赤の0.5に対応)

2HIT→3HIT：赤の三角を幅0.5で切り出す
中心を含んで切り出すと確率が大きい
(青の0.33〜0.67に対応)

◆3HITで中心を含む場合



確率(赤)
=大きい三角-a,b,c
=大きい三角-3a

場合分けの数

- 線の折れているところで場合分けをする
  - 2HIT：四角の左を切り出すか右を切り出すかで、50%を境に分かれる
    - 2次式の累積確率の式が2つ必要
  - 3HIT：0未満を含む、0.5の頂点を含む、1以上を含むの3通りに場合分けが必要
    - 3次式の累積確率の式が3つ必要

→4次以上なんてやってられないので近似式の出番